JOURNAL OF DIFFERENTIAL EQUATIONS 2, 12-32 (1966)

Solutions Périodiques et Presque-Périodiques des Systèmes d'Équations Différentielles Linéaires en Distributions

D. WEXLER

Institut de Mathématique,
Académie de la République Populaire Roumaine

Received December 30, 1964

Dans cette note on étudie le système

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + f, \tag{1}$$

où $A(t)$ est une matrice carrée de fonctions et $f = (f_1, \cdots, f_n)$, f_j étant des distributions. Les systèmes usuels (f fonction), ainsi que les systèmes aux aux impulsions [7] en sont des cas particuliers. La Section 1 est auxiliaire. On donne ici la notion de famille composable de distributions introduite dans [2], la notion de section d'une distribution et on définit quelques espaces de distributions utilisés dans les paragraphes suivants. Dans la Section 2 on trouve les solutions du système (1). Dans la Section 3 on établit quelques résultats concernant l'existence des solutions bornées, périodiques et presque-périodiques, analogues aux résultats connus pour les systèmes d'équations différentielles usuelles.

1. FAMILLES COMPOSABLES DE DISTRIBUTIONS; ESPACES $\mathscr{E}^m$, $\mathscr{D}_+{}^m$, $\mathscr{D}_-{}^m$, $\mathscr{D}^m_{L^1}$; SECTION D'UNE DISTRIBUTION

Nous désignons par $\mathscr{D}$ (ou $\mathscr{D}^\infty$) l'espace des fonctions d'une variable réelle, indéfiniment dérivables, à support compact, par $\mathscr{D}^m$, $m < \infty$, l'espace des fonctions à support compact, ayant m dérivées continues et par $\mathscr{D}'$ (ou $\mathscr{D}'^\infty$) et $\mathscr{D}'^m$ les espaces adjoints [6]. Nous disons qu'une distribution $f \in \mathscr{D}'$ est d'ordre $\leqslant m$ si $f \in \mathscr{D}'^m$. Nous désignons par $\langle f, \varphi \rangle$ la valeur de $f \in \mathscr{D}'$ sur $\varphi \in \mathscr{D}$ et par D (ou d/dt) l'opérateur de dérivation. Tous les espaces adjoints considérés dans cette note sont munis par la topologie forte.

Familles Composables de Distributions

Cette notion a été introduite par R. Cristescu [*2*]. Elle représente la généralisation aux distributions du produit de composition de Volterra. Nous allons exposer cette notion dans un cadre quelque peu élargi. De même nous allons montrer que les propriétés des familles composables résultent des propriétés générales de l'opérateur adjoint.

Nous dirons qu'un espace localement convexe séparé Φ, dont les éléments sont des fonctions $R^1 \to R^1$ est *admissible* si

1. $\mathscr{D} \subset \Phi$.
2. La topologie de $\mathscr{D}$ est plus fine que la topologie induite par Φ.
3. L'espace $\mathscr{D}$ est dense dans Φ.

Dans ces conditions la restriction à $\mathscr{D}$ d'une forme linéaire continue $f \in \Phi'$ est une distribution et f est bien déterminée par sa restriction, puisque $\mathscr{D}$ est dense dans Φ. Alors, on peut identifier Φ' à un sous-espace de $\mathscr{D}'$. En général, la topologie de Φ' est différente de celle induite par $\mathscr{D}'$.

Soient Φ et Ψ deux espaces admissibles et soit $w = \{W_s\}_{s \in R^1}$ une famille de distributions de Φ', telle que pour toute fonction $\varphi \in \Phi$ la fonction

$$\psi(s) = \langle W_s(t), \varphi(t) \rangle$$

appartient à Ψ. La famille w engendre un opérateur linéaire $W : \Phi \to \Psi$, $W(\varphi) = \psi$. On dira que la *famille* w est (Φ, Ψ)*-composable*, si l'opérateur W est continu. Alors l'opérateur adjoint ${}^tW : \Psi' \to \Phi'$ est aussi continu. Pour $g \in \Psi'$ on dira que ${}^tW(g)$ est la *composition de la distribution g par la famille w* et on va désigner cette distribution par $w \circ g$. Donc pour $g \in \Psi'$ on a $w \circ g \in \Phi'$ et la composition est un opérateur linéaire continu $\Psi' \to \Phi'$. La distribution $w \circ g$ est définie par

$$\langle w \circ g, \varphi \rangle = \langle g(s), \langle W_s(t), \varphi(t) \rangle \rangle, \qquad \text{pour} \qquad \varphi \in \Phi.$$

Si $\Phi = \Psi = \mathscr{D}$, on obtient la composition définie dans [*2*].

OBSERVATION 1. *La définition donnée ne dépend pas de l'espace Ψ* dans le sens suivant: si w est (Φ, Ψ_1) et (Φ, Ψ_2)-composable et si $g \in \Psi_1 \cap \Psi_2$, alors les deux compositions représentent la même distribution, puisqu'elles coïncident pour $\varphi \in \mathscr{D}$.

Soient Φ et Ψ deux espaces admissibles, Φ étant un espace à translation continue, c'est-à-dire de $\varphi \in \Phi$ résulte $\tau_s \varphi = \varphi(t - s) \in \Phi$ pour tout $s \in R^1$ et l'opérateur $\tau_s : \Phi \to \Phi$ est continu. La translatée $\tau_s f$ d'une distribution est définie par

$$\langle \tau_s f, \varphi \rangle = \langle f, \tau_s \varphi \rangle = \langle f(t), \varphi(t + s) \rangle \qquad \text{pour} \qquad \varphi \in \Phi;$$

donc $\tau_s f \in \Phi'$ et l'opérateur de translation τ_s en Φ' est continu. On dira que *la distribution* $f \in \Phi'$ est (Φ, Ψ)*-convolutible* si la famille $w = \{\tau_s f\}_{s \in R^1}$ est (Φ, Ψ)-composable. On désignera $w \circ g$ par $f * g$. La convolution est définie donc par

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle g(s), \langle f(t), \varphi(t + s) \rangle \rangle, \qquad \text{pour} \qquad \varphi \in \Phi.$$

En particularisant les espaces Φ et Ψ on retrouve les convolutions définies dans [*6*].

PROPOSITION 1. *Soient* Φ_1, Φ_2, Φ_3 *trois espaces admissibles. Si la famille* $w^1 = \{W_s^1\}_{s \in R^1}$ *est* (Φ_1, Φ_2)*-composable et la famille* $w^2 = \{W_s^2\}_{s \in R^1}$ *est* (Φ_2, Φ_3)*-composable, alors la famille* $w = \{w^1 \circ W_s^2\}_{s \in R^1}$ *est* (Φ_1, Φ_3)*-composable et l'on a*

$$w^1 \circ (w^2 \circ g) = \{w^1 \circ W_s^2\}_{s \in R^1} \circ g, \qquad \text{pour} \qquad g \in \Phi_3'.$$

Démonstration. Pour $\varphi \in \Phi_3$ on a

$$\eta(s) = \langle w^1 \circ W_s^2, \varphi \rangle = \langle W_s^2(h), \langle W_h^1(t), \varphi(t) \rangle \rangle.$$

Donc en désignant par W l'opérateur engendré par la famille w et par W^1, W^2 les opérateurs engendrés par w^1, w^2, on a $W = W^2 \odot W^1$, le signe $\odot$ désignant la composition des opérateurs. Il s'en suit que la famille w est (Φ^1, Φ^2)-composable et que ${}^tW = {}^tW^1 \odot {}^tW^2$.

PROPOSITION 2. *Soient* Φ_1, Φ_2 *et* Ψ *trois espaces admissibles avec la propriété que si* $\varphi_1 \in \phi_1$, *alors la dérivé* $D\varphi_1 \in \Phi_2$. *Nous supposons aussi que l'opérateur de dérivation* $D : \Phi_1 \to \Phi_2$ *est continu. Si la famille* $w = \{W_s\}_{s \in R^1}$ *est* (Φ_2, Ψ)*-composable, alors la famille* $Dw = \{DW_s\}_{s \in R^1}$ *est* (Φ_1, Ψ)*-composable et l'on a*

$$D(w \circ g) = (Dw) \circ g, \qquad \text{pour} \qquad g \in \Psi'.$$

Démonstration. Remarquons d'abord que l'opérateur de dérivation des distributions coïncide sur Φ_2' avec l'adjoint de l'opérateur continu $-D : \Phi_1 \to \Phi_2$ défini par $\varphi_1 \to -D\varphi_2$, donc $DW_s \in \Phi_1'$. Pour $\varphi_1 \in \Phi_1$ on a

$$\eta(s) = \langle DW_s(t), \varphi_1(t) \rangle = -\langle W_s(t), D\varphi_1(t) \rangle.$$

En désignant par DW l'opérateur engendré par Dw et par W celui engendré par w on a donc $DW = W \odot (-D)$. Il s'en suit que la famille Dw est (ϕ_1, Ψ)-composable et que ${}^t(DW) = {}^t(-D) \odot {}^tW$.

De la même manière on démontre la

PROPOSITION 3. *Si* $w = \{W_s\}_{s \in R^1}$ *est* (Φ_2, Ψ)*-composable et* α *est un multiplicateur* $\Phi_1 \to \Phi_2$, *alors la famille* $\alpha w = \{\alpha W_s\}_{s \in R^1}$ *est aussi* (Φ_1, Ψ)*-composable et l'on a*

$$\alpha(w \circ g) = (\alpha w) \circ g, \qquad \text{pour} \qquad g \in \Psi'.$$

Soit $\mathscr{F} = \{F\}$ une base de filtre en Φ. On dira que $\mathscr{F}$ *est convergente dans le point* $t \in R^1$ si la base $\mathscr{F}_t = \{F_t\}$, $F_t = \{\varphi(t)\}_{\varphi \in F}$ est convergente en R^1. On vérifie facilement la

PROPOSITION 4. *Soit* Φ *un espace admissible à translation continue avec la propriété que toute base de filtre convergente en* Φ *est convergente dans chaque point* $t \in R^1$. *Alors la mesure de Dirac* $\delta_h \in \Phi'$, δ_h *est* (Φ, Φ)*-convolutible et*

$$\delta_h * f = \tau_h f, \qquad \textit{pour} \qquad f \in \Phi'. \tag{2}$$

Si $v = (v^{ij})$ est une matrice $m \times n$, on dira que $v \in \Phi$ si $v^{ij} \in \Phi$, et que $v \in \Phi'$ si $v^{ij} \in \Phi'$. Pour $\varphi \in \Phi$ et $v = (v^{ij}) \in \Phi'$ on désigne par $\langle v, \varphi \rangle$ la matrice numérique $m \times n$, $(\langle v^{ij}, \varphi \rangle)$. On dira *qu'une famille de matrices* $w = \{(W_s^{ij})\}_{s \in R^1}$ *est* (Φ, Ψ)*-composable*, si les mn familles $w^{ij} = \{W_s^{ij}\}_{s \in R^1}$ sont (Φ, Ψ)-composables; si $g = (g_1, \cdots, g_n) \in \Psi'$, on désignera par $w \circ g$ le vecteur

$$w \circ g = \left(\sum_{j=1}^{n} w^{1j} \circ g_j, \cdots, \sum_{j=1}^{n} w^{mj} \circ g_j \right).$$

Les résultats précédents restent vrais si l'on remplace les familles composables scalaires par des familles de matrices carées $n \times n$ et la distribution g par une distribution vectorielle $g(g_1, \cdots, g_n)$. La formule (2) s'écrit en ce cas

$$I\delta_h * f = \tau_h f,$$

I étant la matrice-unité.

Espaces $\mathscr{E}^m$

Dans [6] on introduit l'espace $\mathscr{E}$ des fonctions indéfiniment dérivables (à support quelconque). Un système de seminormes définissant la topologie de $\mathscr{E}$ sont les $N(K, m)$,

$$N(K, m)(\varphi) = \max_{0 \leq j \leq m} \sup_{t \in K} | D^j \varphi(t) |, \qquad \text{pour} \qquad \varphi \in \mathscr{E},$$

$K \subset R^1$ compact et m entier ≥ 0. Alors $\mathscr{E}$ est un espace de Fréchet. Son adjoint est l'espace des distributions à support compact.

Nous considérons aussi l'espace $\mathscr{E}^m$ des fonctions ayant m dérivées continues avec la topologie définie par le système de séminormes $N(K, m)$,

$K \subset R^1$ compact. Nous désignons l'espace $\mathscr{E}$ par $\mathscr{E}^\infty$. On vérifie facilement que les $\mathscr{E}^m$ sont des espaces admissibles complets à translation continue.

$\mathscr{E}'^m$ est l'espace des distributions à support compact d'ordre $\leqslant m$. La démonstration de ce fait est la même que celle donnée dans [*6*] pour montrer que $\mathscr{E}'$ est l'espace des distributions à support compact.

Espaces $\mathscr{D}_+{}^m$, $\mathscr{D}_-{}^m$

D'après le modèle des espaces $\mathscr{D}_+$, $\mathscr{D}_-$ des fonctions indéfiniment dérivables à support limité à gauche (respectivement à droite) introduits dans [*6*], nous considérons l'espace $\mathscr{D}_+{}^m$ (respectivement $\mathscr{D}_-{}^m$) des fonctions à support limité à gauche (respectivement à droite) ayant m dérivées continues. Nous désignons $\mathscr{D}_+$ et $\mathscr{D}_-$ par $\mathscr{D}_+{}^\infty$ respectivement $\mathscr{D}_-{}^\infty$. Nous désignons par $\mathscr{E}^m_{[-n,+\infty)}$, n entier $\geqslant 0$ le sous-espace de $\mathscr{E}^m$ des fonctions ayant le support dans $[-n, +\infty)$. On introduit alors dans $\mathscr{D}_+{}^m$ la topologie limite inductive stricte [*1*] des espaces $\mathscr{E}^m_{[-n,+\infty)}$, $n = 1, 2, \cdots$. Puisque $\mathscr{E}^m_{[-n,+\infty)}$ est un espace complet et séparé il s'en suit que $\mathscr{D}_+{}^m$ est complet et séparé.

$\mathscr{D}_+{}^m$ *est un espace admissible à translation continue.* Nous allons montrer seulement que $\mathscr{D}$ est dense dans $\mathscr{D}_+{}^m$, la vérification des autres conditions étant immédiate. En effet, si $\varphi \in \mathscr{D}_+{}^m$, il s'en suit que φ se trouve dans un espace $\mathscr{E}^m_{[-n_0,+\infty)}$. D'après [*6*] il existe une suite de régularisées $\{\varphi_k\} \subset \mathscr{E}^\infty$ avec $\varphi_k \to \varphi$ dans $\mathscr{E}^m$. On peut trouver $\alpha_k \in \mathscr{D}$, telles que $0 \leqslant \alpha_k(t) \leqslant 1$, $\alpha_k(t) = 1$, si $t \in [-n_0, n_0 + k]$ et $\alpha_k(t) = 0$, si $t \in [-n_0 - 1, n_0 + k + 1)$. Posons alors $\psi_k = \alpha_k \varphi_k$. On a $\psi_k \in \mathscr{D}$, $\psi_k \to \varphi$ dans $\mathscr{E}^m_{[-n_0-1,+\infty)}$, d'où $\psi_k \to \varphi$ dans $\mathscr{D}_+{}^m$, donc $\mathscr{D}$ est dense dans $\mathscr{D}_+{}^m$.

En introduisant dans $\mathscr{D}_-{}^m$ la topologie limite inductive stricte des espaces $\mathscr{E}^m_{(-\infty,n]}$, $n = 1, 2, \cdots$, on déduit que $\mathscr{D}_-{}^m$ a les mêmes propriétés que $\mathscr{D}_+{}^m$.

Nous désignons par $\mathscr{D}'^m_-$ (respectivement $\mathscr{D}'^m_+$) l'espace adjoint de $\mathscr{D}_+{}^m$ (respectivement $\mathscr{D}_-{}^m$). *Alors* $\mathscr{D}'^m_-$ (*respectivement* $\mathscr{D}'^m_+$) *est l'espace des distributions d'ordre* $\leqslant m$ *à support limité à droite (respectivement à gauche)*. En effet, observons d'abord que $\mathscr{D}'^m_- \subset \mathscr{D}'^m$, la topologie de $\mathscr{D}^m$ étant plus fine que celle induite dans $\mathscr{D}^m$ par $\mathscr{D}_+{}^m$. Alors, si $f \in \mathscr{D}'^m$, elle a le support limité à droite; sans quoi on pourrait trouver une suite $\{\varphi_k\} \subset \mathscr{D}$, telle que $\varphi_k(t) = 0$, pour $t \notin (k, k+1)$ et $\langle f, \varphi_k \rangle = 1$, ce qui est impossible puisque $\varphi_k \to 0$ dans $\mathscr{D}_+{}^m$, donc $\langle f, \varphi_k \rangle \to 0$. Réciproquement, si $f \in \mathscr{D}'^m$ est à support limité à droite, on vérifie facilement que f est continue sur $\mathscr{D}^m$ muni de la topologie induite par $\mathscr{D}_+{}^m$, donc $f \in \mathscr{D}'^m_-$, puisque $\mathscr{D}^m$ est dense dans $\mathscr{D}_+{}^m$.

Espaces $\mathscr{D}^m_{L^1}$

Dans [*6*] on introduit l'espace $\mathscr{D}_{L^1}$ des fonctions φ indéfiniment dérivables pour lesquelles $D^j\varphi \in L^1$, $j = 1, 2, \cdots$, $\mathscr{D}_{L^1}$ étant muni par la topologie définie par la famille dénombrable de normes $\|\cdot\|_m$,

$$\|\varphi\|_m = \max_{0\leqslant j\leqslant m} \int_{-\infty}^{+\infty} |D^j\varphi(t)|\,dt, \qquad \text{pour} \qquad \varphi \in \mathscr{D}_{L^1}.$$

L'espace adjoint $\mathscr{B}'$ est appelé *l'espace des distributions bornées.*

Nous considérons aussi l'espace $\mathscr{D}_{L^1}^m$ des fonctions φ ayant m dérivées continues, telles que $D^j\varphi \in L^1$, pour $j = 0, 1, \cdots, m$, $\mathscr{D}_{L^1}^m$ étant normé par la norme $\|\cdot\|_m$. Nous désignerons $\mathscr{D}_{L^1}$ par $\mathscr{D}_{L^1}^\infty$.

Proposition 5. *Les $\mathscr{D}_{L^1}^m$ sont des espaces admissibles.* Nous vérifions seulement que $\mathscr{D}$ est dense dans $\mathscr{D}_{L^1}^m$. Soit $\alpha \in \mathscr{D}$, telle que

$$0 \leqslant \alpha(t) \leqslant 1, \quad \alpha(t) = 1, \quad \text{si} \quad t \in [-1, 1], \qquad \alpha(t) = 0, \quad \text{si} \quad t \notin (-2, 2).$$

Supposons d'abord $m < \infty$ et soit

$$M_m = \max_{0\leqslant j\leqslant m} \sup_{t\in R^1} |D^j\alpha(t)|.$$

Soient maintenant $\varphi \in \mathscr{D}_{L^1}^m$ et $\varphi_n(t) = \alpha(t/n)\,\varphi(t)$. Il s'en suit $\varphi_n \in \mathscr{D}^m$ et $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathscr{E}^m$. Alors, pour $0 \leqslant j \leqslant m$, $t \in R^1$, on a

$$\lim_{n\to\infty} [D^j\varphi_n(t) - D^j\varphi(t)] = 0$$

et

$$|D^j\varphi_n(t) - D^j\varphi(t)| \leqslant M_m \sum_{k=0}^{j} C_j{}^k\, |D^k\varphi(t)|.$$

D'après le théorème de convergence de Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |D^j\varphi_n(t) - D^j\varphi(t)|\,dt = 0, \qquad 0 \leqslant j \leqslant m,$$

donc $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathscr{D}_{L^1}^m$ et $\mathscr{D}$ est dense dans $\mathscr{D}_{L^1}^m$. Si $m = \infty$ on a $\varphi_n \to \varphi$ dans chaque $\mathscr{D}_{L^1}^k$, $0 \leqslant p < \infty$, d'où $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathscr{D}_{L^1}^\infty$.

On vérifie facilement que si $m \geqslant 1$ on a

$$D^j\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} D^{j+1}\varphi(t)\,dt, \qquad \text{pour} \qquad \varphi \in \mathscr{D}_{L^1}^m, \qquad 0 \leqslant j \leqslant m-1. \tag{3}$$

Il s'en suit

$$|D^j\varphi(t)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |D^{j+1}\varphi(t)|\,dt,$$

d'où

$$|D^j\varphi(t)| \leqslant \|\varphi\|_m, \qquad 0 \leqslant j \leqslant m-1. \tag{4}$$

De (3) résulte aussi

$$\lim_{t\to\infty} D^j\varphi(t) = 0, \qquad 0 \leqslant j \leqslant m-1. \tag{5}$$

Observation 2. En général les espaces $\mathscr{D}^m_{L^1}$ ne sont pas complets. Ainsi le complété de $\mathscr{D}^0_{L^1}$ est L^1. Pourtant, *si* $\{\varphi_n\}$ *est une suite de Cauchy dans* $\mathscr{D}^{m+1}_{L^1}$, *il y a* $\varphi_0 \in \mathscr{D}^m_{L^1}$, *telle que* $\varphi_n \to \varphi_0$ *dans* $\mathscr{D}^m_{L^1}$. En effet, de (4) résulte

$$| D^j\varphi_n(t) - D^j\varphi_r(t) | \leqslant \| \varphi_n - \varphi_r \|_{m+1}, \qquad 0 \leqslant j \leqslant m,$$

donc $\{\varphi_n\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathscr{E}^m$. Alors il existe $\varphi_0 \in \mathscr{E}^m$, telle que $\varphi_n \to \varphi_0$ dans $\mathscr{E}^m$. Soit maintenant $\epsilon > 0$ arbitraire. Il existe $N = N(\epsilon)$ entier > 0, tel que

$$\| \varphi_n - \varphi_r \|_{m+1} < \epsilon, \qquad \text{pour} \qquad n, r \geqslant N,$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | D^j\varphi_n(t) - D^j\varphi_r(t) | \, dt < \epsilon, \qquad \text{pour} \qquad n, r \geqslant N, \qquad 0 \leqslant j \leqslant m+1.$$

Du lemme de Fatou appliqué à la suite $\{| D^j\varphi_n(t) - D^j\varphi_r(t) |\}_{N \leqslant r < \infty}$, on déduit que la fonction $| D^j\varphi_n(t) - D^j\varphi_0(t) |$, $n \geqslant N$, $0 \leqslant j \leqslant m$ est dans L^1 et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | D^j\varphi_n(t) - D^j\varphi_0(t) | \, dt \leqslant \epsilon, \qquad n \geqslant N, \qquad 0 \leqslant j \leqslant m.$$

Donc $\varphi_0 \in \mathscr{D}^m_{L^1}$ et $\varphi_n \to \varphi_0$ dans $\mathscr{D}^m_{L^1}$.

De l'observation précédente résulte que $\mathscr{D}^\infty_{L^1}$ est un espace complet.

Observation 3. *L'opérateur de translation est une isométrie* $\mathscr{D}^m_{L^1} \to \mathscr{D}^m_{L^1}$, *donc les* $\mathscr{D}^m_{L^1}$ *sont des espaces à translation continue.*

Nous désignons par $\mathscr{B}'^m$ l'espace adjoint de $\mathscr{D}^m_{L^1}$.

Proposition 6.

$$\mathscr{B}'^\infty = \bigcup_{m \leqslant 0 < \infty} \mathscr{B}'^m.$$

Démonstration. Si Φ^m est l'espace $\mathscr{D}_{L^1}$ normé par la norme $\| \cdot \|_m$, l'on a d'après [*3*]

$$\mathscr{B}'^\infty = \bigcup_{m \leqslant 0 < \infty} \Phi'^m.$$

Φ^m étant un sous-espace normé, dense de $\mathscr{D}^m_{L^1}$, on déduit $\Phi'^m = \mathscr{B}'^m$.

Nous dirons qu'*une distribution bornée f est de rang m*, ($m \geqslant 1$) si $f \in \mathscr{B}'^m$ et $f \notin \mathscr{B}'^{m-1}$; nous dirons que *$f$ est de rang* 0, si $f \in \mathscr{B}'^0$.

Exemples *1.* Puisque le complété de $\mathscr{D}^0_{L^1}$ est L^1 il résulte $\mathscr{B}'^0 = L^\infty$.

2. L'opérateur de dérivation est un opérateur linéaire continu $\mathscr{D}^{m+1}_{L^1} \to \mathscr{D}^m_{L^1}$. Donc, si $f \in \mathscr{B}'^m$, alors $Df \in \mathscr{B}'^{m+1}$.

3. Soit $f(t) = \sin e^t$, donc $f \in \mathscr{B}'^0$. Alors $Df(t) = e^t \cos e^t \in \mathscr{B}'^1$. La fonction Df n'étant pas bornée (au sens usuel), on déduit que Df est de rang 1. On va montrer dans Section 3 que la fonction $D^m f$ est de rang m.

4. Si f est une distribution-fonction sommable, on déduit de (4)

$$|\langle f, \varphi\rangle| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\varphi(t)\,dt\right| \leqslant \|\varphi\|_1 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt, \qquad \text{pour} \qquad \varphi \in \mathscr{D},$$

donc $f \in \mathscr{B}'^1$.

5. On a $\mathscr{E}' \subset \mathscr{B}'$.

6. La mesure de Dirac δ est de rang 1.

En ce qui concerne le rapport entre l'ordre et le rang d'une distribution, l'exemple *3* montre qu'il y a des fonctions indéfiniment dérivables de n'importe quel rang. Cependant, une distribution de rang m est d'ordre $\leqslant m$.

Section d'une distribution

Soient $f(t)$ une fonction localement sommable et G un ouvert de R^1. On appelle *section de f à G* la fonction localement sommable $\bar{f} = \xi f$, où ξ est la fonction caractéristique de G. $\bar{f}$ définit donc une distribution égale à f sur G et nulle dans le complémentaire $C\bar{G}$. Si maintenant f est une distribution quelconque nous dirons que *$\bar{f}$ est une section de f à G* si $\bar{f} = f$ sur G et $\bar{f} = 0$ sur $C\bar{G}$.

Proposition 7. *Soient $f \in \mathscr{D}'$ et G un ouvert de R^1, $G \neq R^1$. Il existe une infinité de sections de f à G; deux d'entre elles diffèrent d'une distribution à support dans FrG. Si f est d'ordre $\leqslant r$, on peut trouver des sections d'ordre $\leqslant r$.*

Démonstration. D'après [6] f peut être décomposée en une somme infinie convergente et localement finie

$$f = \sum_j D^{k_j} g$$

de dérivées de fonctions continues g à support compact. Désignons par $\bar{g}$ la section de la fonction continue g à G. On vérifie facilement que

$$\bar{f} = \sum_j D^{k_j} \bar{g}_j$$

est une section de f à G.

Si f est d'ordre $\leqslant r$, alors f est la dérivée d'ordre r d'une mesure μ. Soit $\bar{\mu}$ la mesure définie par

$$\bar{\mu}(\varphi) = \mu(\xi\varphi) \qquad \text{pour} \qquad \varphi \in \mathscr{D},$$

ξ étant la fonction caractéristique de G. Il s'en suit que $\bar{\mu}$ est une section de μ à G et que $D^r\bar{\mu}$ est une section de f à G. Evidemment l'ordre de $D^r\mu$ est $\leqslant r$.

Si maintenant $\bar{f}$ est une section, $\bar{f} + h$ en est une autre, quelle que soit la distribution h à support dans FrG; il existe donc une infinité de sections de f à G.

Nous dirons que la *distribution* $f \in \mathscr{D}'$ *est périodique de période* ω si la translatée $\tau_\omega f = f$.

PROPOSITION 8. *Quelle que soit la distribution* $f \in \mathscr{D}'^r$, $0 \leqslant r \leqslant \infty$, *de* période ω il existe une section $\bar{f} \in \mathscr{E}'^r$ *de* f *à l'intervalle* $(0, \omega)$, *telle que*

$$f = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{n\omega}\right) * \bar{f},$$

la convolution étant au sens $(\mathscr{D}^r, \mathscr{E}^r)$.

Démonstration. D'après la Proposition 7 on peut trouver une section $\bar{f} \in \mathscr{E}'^r$ de f à $(0, \omega)$. Soit

$$f_1 = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{n\omega}\right) * \bar{f}.$$

On vérifie facilement que f_1 est de période ω et que $f_1 = f$ sur chaque intervalle $(n\omega, (n+1)\,\omega)$. Il s'en suit que la distribution $h = f - f_1$ a le support dans l'ensemble $F = \{n\omega\}_n$. Soit $\alpha_n \in \mathscr{D}$, telle que $0 \leqslant \alpha_n(t) \leqslant 1$, $\alpha_n(t) = 1$, si $t = n\omega$ et $\alpha_n(t) = 0$, si $t \notin ((n-1)\,\omega, (n+1)\,\omega)$ et soit $h_n = \alpha_n h$. Le support de h_n est le point $n\omega$ et

$$h = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n\,.$$

Puisque h est de période ω l'on a $\tau_{p\omega} h = h$, donc

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau_{p\omega} h_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n\,.$$

Il s'ensuit $\tau_{p\omega} h_n = h_{p+n}$, parceque le support de $\tau_{p\omega} h_n$ et h_{p+n} est le point $(p + n)\,\omega$. Donc, pour $n = 0$

$$h_p = \tau_{p\omega} h_0 ,$$

d'où

$$h = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau_{n\omega} h_0 = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{n\omega} \right) * h_0$$

et, en posant $\tilde{f} = f + h_0$, l'on a

$$f = f_1 + h = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{n\omega} \right) * \tilde{f}.$$

De $f \in \mathscr{E}'^r$ on déduit $f_1 \in \mathscr{D}'^r$, donc $h \in \mathscr{D}'^r$. Il s'en suit $h_0 \in \mathscr{D}'^r$, donc $h_0 \in \mathscr{E}'^r$, puisque h_0 est à support compact. Par conséquent $\tilde{f} \in \mathscr{E}'^r$.

2. Les Solutions du Systeme (1)

L'existence des solutions du système (1) a été démontrée dans [*3*, *6*] par la méthode de variation des constantes, dans l'hypothèse que la matrice $A(t) \in \mathscr{E}^\infty$. Afin d'englober les systèmes usuels, aussi bien que les systèmes aux impulsions [*7*], nous étudions le problème de l'existence des solutions dans l'hypothèse que $A(t) \in \mathscr{E}^m$, $0 \leqslant m \leqslant \infty$. L'analyse des démonstrations de [*3*, *6*] montre qu'à quelques observations supplémentaires elles restent valable pour le cas considéré ici.

Observons d'abord que, d'après [*6*], le produit $A(t)\,x$ est défini seulement si x est une distribution d'ordre $\leqslant m$, puisque $A(t) \in \mathscr{E}^m$. C'est pourquoi on va chercher les solutions du système (1) parmi les distributions d'ordre $\leqslant m$.

Soit $X(t, s)$ une matrice fondamentale de solutions (usuels), $X(t, t) = I$, du système homogène attaché à (1),

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x. \tag{7}$$

Proposition 9. *Si $A(t) \in \mathscr{E}^m$, $f \in \mathscr{D}'^r$ et $r \leqslant m + 1$ le système (1) admet une infinité de solutions*

$$x = X(t, 0)\,[c + g] \tag{8}$$

où g est une primitive de $X(0, t)\,f$ et c est une constante arbitraire. Les solutions sont des distributions d'ordre $\leqslant r - 1$, ou des fonctions à variation bornée sur tout intervalle fini, suivant que $r \geqslant 1$ ou $r = 0$.

Démonstration [6]. Posons

$$x = X(t, 0)\, y,$$

x et y, étant des distributions de même ordre. La matrice $X(t, 0) \in \mathscr{E}^{m+1}$ puisque $A(t) \in \mathscr{E}^m$. Alors la première dérivée du produit $X(t, 0)\, y$ peut être calculée d'après les règles usuelles

$$\frac{dX(t, 0)\, y}{dt} = \frac{dX(t, 0)}{dt}\, y + X(t, 0)\, \frac{dy}{dt}.$$

De

$$\frac{dX(t, 0)}{dt} = A(t)\, X(t, 0) \qquad \text{et} \qquad X^{-1}(t, 0) = X(0, t),$$

on obtient pour y le système équivalent à (1)

$$\frac{dy}{dt} = X(0, t)\, f.$$

On est ainsi amené à la recherche d'une primitive, problème qui a une infinité de solutions. Si g est une primitive fixée, alors les autres seront $c + g$, où c est une constante arbitraire, ce qui démontre (8). Les afirmations concernant l'ordre des solutions resultent de [6].

OBSERVATION 4. *Si f est une distribution-fonction continue le système (1) n'admet pas d'autres solutions en distributions que les solutions usuelles* [6].

Remarquons qu'on peut démontrer la Proposition 9 en utilisant les familles composables de distributions. En effet, soit $\alpha(t) \in \mathscr{E}^\infty$, telle que

$$0 \leqslant \alpha(t) \leqslant 1, \quad \alpha(t) = 1, \qquad \text{si} \qquad t \in [1, +\infty)$$

et

$$\alpha(t) = 0, \qquad \text{si} \qquad t \in (-\infty, 0]$$

et soient $f^+ = \alpha f$, $f^- = (1 - \alpha) f$, donc $f = f^+ + f^-$ et $f^+ \in \mathscr{D}'^r_+$, $f^- \in \mathscr{D}'^r_-$. Considérons les systèmes

$$\frac{dx^+}{dt} = A(t)\, x^+ + f^+ \tag{9}$$

et

$$\frac{dx^-}{dt} = A(t)\, x^- + f^-. \tag{10}$$

Évidemment $x^+ + x^-$ est une solution du système (1). D'après [6], une matrice $E(t)$ est appelée solution élémentaire de (1) si elle vérifie

$$\frac{dE}{dt} = A(t)\, E + I\delta_s.$$

Alors, en désignant par $H(t)$ la matrice de Heaviside, on déduit que

$$W_s^+(t) = H(t-s)\, X(t, s),$$

$s \in R^1$, est une famille de solutions élémentaires. Désignons par p le nombre $r-1$ ou r suivant que $r \geqslant 1$ ou $r=0$. Les matrices $W_s^+(t) \in \mathscr{D}_+'^p$. Si $\varphi \in \mathscr{D}_-^p$, on déduit

$$\eta(s) = \langle W_s^+(t), \varphi(t) \rangle = \int_s^{+\infty} X(t, s)\, \varphi(t)\, dt,$$

donc $\eta(s)$ est une matrice dérivable à support limité à droite. En outre on vérifie que

$$\frac{d\eta}{ds} = -\eta(s)\, A(s) - I\varphi(s),$$

donc $\eta \in \mathscr{D}_-'^{p+1}$, et l'opérateur $W^+ \colon \mathscr{D}_-^p \to \mathscr{D}_-^{p+1}$, $W^+(\varphi) = \eta$, engendré par la famille $w^+ = \{W_s^+\}_{s \in R^1}$ est continu. Par conséquent, la famille w^+ est $(\mathscr{D}_-^p, \mathscr{D}_-^{p+1})$-composable. En utilisant les propriétés de la composition on déduit

$$\begin{aligned} D(w^+ \circ f^+) &= \{DW_s^+\}_{s \in R^1} \circ f^+ = \{A(t)\, W_s^+(t) + I\delta\}_{s \in R^1} \circ f^+ \\ &= (A(t)\, w^+) \circ f^+ + (I\delta) * f^+ = A(t)\, (w^+ \circ f^+) + f^+, \end{aligned}$$

donc $w^+ \circ f^+$ est une solution de (9). De la même manière on montre qu'une solution de (10) est la composition $w^- \circ f^-$, où

$$w^- = \{W_s^-\}_{s \in R^1}, \qquad W_s^-(t) = -H(s-t)\, X(t, s).$$

Il s'en suit que

$$w^+ \circ f^+ + w^- \circ f^-$$

est une solution du système (1), les autres s'obtenant en ajoutant la solution générale du système (7). Quant à l'ordre des solutions, on obtient ici l'affirmation de la Proposition 9, seulement pour $r \geqslant 1$.

3. Solutions Bornées, Périodiques, et Presque-Périodiques

Solutions périodiques

Nous supposons ici que $A(t)$ et f sont périodiques de la même période ω et que le système (1) vérifie les conditions de la Proposition 9, qui garantissent l'existence des solutions.

Une solution x de (1) déterminée par la constante c est de période ω si $\tau_{-\omega} x = x$, c'est-à-dire

$$X(t+\omega, 0)\, [c + \tau_{-\omega} g] = X(t, 0)\, [c + g].$$

De

$$X(t+\omega, 0) = X(t, 0)\, X(\omega, 0),$$

on déduit

$$[I - X(\omega, 0)]\, c = X(\omega, 0)\, \tau_{-\omega} g - g. \tag{11}$$

La distribution du deuxième membre de (11) est une distribution-constante, sa dérivée étant nulle. Donc

Proposition 10. *Le système (1) admet des solutions de période ω si et seulement si le système d'équations linéaires (11) est compatible.*

Théorème 1. *Si le système (7) n'admet d'autres solutions de période ω que la solution nulle, alors pour tout f périodique de période ω le système (1) admet une solution périodique unique de période ω, et réciproquement.*

Démonstration. Les solutions de (7) sont $X(t, 0)\, x^0$. Si la condition du théorème est vérifié, on déduit que le système d'équations linéaires

$$x^0 = X(\omega, 0)\, x^0$$

n'admet que la solution nulle, donc $\det [I - X(\omega, 0)] \neq 0$. Il s'en suit que (11) admet une solution unique.

L'affirmation réciproque est vraie, puisqu'elle est vraie si f est une fonction (voir par example [*4*]).

Supposons vérifiées les conditions du théorème. On sait [*4*] que si f est une distribution-fonction, la solution périodique unique de (1) est

$$p(t) = \int_0^\omega P(t, s) f(s)\, ds,$$

où $P(t, s)$ est de période ω par rapport à t aussi bien qu'à s,

$$P(t, s) = \begin{cases} X(t, 0)\, [I - X(\omega, 0)]^{-1}\, X(0, s), & \text{pour} \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \omega, \\ X(t+\omega, 0)\, [I - X(\omega, 0)]^{-1}\, X(0, s), & \text{pour} \quad 0 \leqslant t < s \leqslant \omega. \end{cases}$$

Il est facile à voir que

$$P(t, s) = X(t, (m-1)\,\omega)\, [I - X(\omega, 0)]^{-1}\, X(0, s),$$

pour

$$(m-1)\,\omega + s \leqslant t < m\omega + s.$$

D'après [7], $P(t, s)$ est la solution périodique unique de période ω du système matriciel aux impulsions

$$\frac{dZ}{dt} = A(t)\, Z + I \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta_{m\omega+s}\,.$$

On vérifie aisément que si la matrice $A(t)$ est constante $P(t, s) = P(t - s, 0)$, donc on peut représenter la solution périodique

$$p(t) = P(t, 0) * \tilde{f},$$

où $\tilde{f} = \xi f$, ξ étant la fonction caractéristique de l'intervalle $(0, \omega)$. Plus généralement on a la

PROPOSITION 11. *Si la condition du théorème 1 est vérifiée, la solution périodique unique de (1) est*

$$w \circ \tilde{f},$$

où $w = \{W_s(t)\}_{s \in R^1}$, $W_s(t) = P(t, s)$, *et* $\tilde{f}$ *est une section de* f *à* $(0, \omega)$, *la composition étant au sens* $(\mathscr{D}^p, \mathscr{E}^r)$, $p = \max(r - 1, 0)$.

Démonstration. Pour $\varphi \in \mathscr{D}^p$ l'on a

$$\eta(s) = \langle W_s(t), \varphi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t, s)\, \varphi(t)\, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{(n-1)\omega+s}^{n\omega+s} P(t, s)\, \varphi(t)\, dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{(n-1)\omega+s}^{n\omega+s} X(t, (n-1)\omega)\, [I - X(\omega, 0)]^{-1}\, X(0, s)\, \varphi(t) dt.$$

La fonction φ étant à support compact, on déduit que la somme infinie est localement finie. Il s'en suit que la matrice $\eta(s) \in \mathscr{E}^{p+1}$, donc $\eta(s) \in \mathscr{E}^r$. Il est facile à voir que l'opérateur $W : \mathscr{D}^p \to \mathscr{E}^r$, $W(\varphi) = \eta$ engendré par la famille w est continu. Par conséquent la famille w est $(\mathscr{D}^p, \mathscr{E}^r)$-composable. Soit $\tilde{f}$ la section de f à $(0, \omega)$ construite dans la Proposition 8. En utilisant les propriétés de la composition on déduit

$$D(w \circ \tilde{f}) = (Dw) \circ \tilde{f} = \left\{ A(t)\, P(t, s) + I \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta_{m\omega+s} \right\}_{s \in R^1} \circ \tilde{f}$$

$$= \{A(t)\, P(t, s)\}_{s \in R^1} \circ \tilde{f} + \left\{ I \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta_{m\omega+s} \right\}_{s \in R^1} \circ \tilde{f}$$

$$= A(t)(w \circ \tilde{f}) + (I \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta_{m\omega}) * \tilde{f} = A(t)(w \circ \tilde{f}) + f$$

Donc $w \circ \tilde{f}$ est une solution du système (1). Elle est périodique de période ω, puisque

$$\begin{aligned}\tau_\omega(w \circ \tilde{f}) &= (I\delta_\omega) * (w \circ \tilde{f}) = \{I\delta_{\omega+h}\}_{h\in R^1} \circ (w \circ \tilde{f}) \\ &= \{\{I\delta_{\omega+h}\}_{h\in R^1} \circ W_s\}_{s\in R^1} \circ \tilde{f} = \{(I\delta_\omega) * W_s\}_{s\in R^1} \circ \tilde{f} = w \circ \tilde{f}.\end{aligned}$$

Considérons maintenant le système adjoint à (7),

$$\frac{dz}{dt} = -zA(t), \tag{12}$$

dont les solutions sont $z = z^0X(0, t)$ et $z \in \mathscr{E}^{m+1}$. Une solution de (12) est de période ω si et seulement si sa condition initiale vérifie

$$z^0 = z^0X(0, \omega),$$

ou bien

$$z^0X(\omega, 0) = z^0. \tag{13}$$

Lemme 1. *Pour toute solution périodique $\bar{z}$ du système adjoint (12) et toute solution x du système (1) on a*

$$\bar{z}(\tau_{-\omega}x - x) = \int_0^\omega \bar{z}f dt.$$

L'intégrale est au sens de [5].

Démonstration. De

$$\bar{z}\frac{dx}{dt} = \bar{z}A(t)\,x + \bar{z}f,$$

on déduit

$$\bar{z}\frac{dx}{dt} + \frac{d\bar{z}}{dt}x = \bar{z}f,$$

donc

$$\frac{d(\bar{z}x)}{dt} = \bar{z}f.$$

D'après [5],

$$\int_0^\omega \frac{d(\bar{z}x)}{dt}\,dt = \tau_{-\omega}(\bar{z}x) - \bar{z}x = (\tau_{-\omega}\bar{z})\,(\tau_{-\omega}x) = \bar{z}(\tau_{-\omega}x - x)$$

et le lemme est démontré.

THÉORÈME 2. *Le système (1) admet des solutions périodiques de période ω si et seulement si*

$$\int_0^\omega \bar{z} f dt = 0,$$

pour toute solution $\bar{z}$ de période ω de (12).

Démonstration. Si le système (1) admet des solutions périodiques, on déduit du lemme que la condition est vérifiée. Réciproquement, si la condition du théorème est vérifiée, l'on a

$$\bar{z}(\tau_{-\omega}x - x) = 0,$$

pour toute solution $\bar{z}$ de période ω de (12). Mais

$$\begin{aligned} \tau_{-\omega}x - x &= X(t + \omega, 0)\,[c + \tau_{-\omega}g] - X(t, 0)\,[c + g] \\ &= X(t, 0)\,\{[X(\omega, 0) - I]\,c + X(\omega, 0)\,\tau_{-\omega}g - g\} \end{aligned}$$

et donc, d'après (13)

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{z}(\tau_{-\omega}x - x) = \bar{z}^0\{[X(\omega, 0) - I]\,c + X(\omega, 0)\,\tau_{-\omega}g - g\} \\ &= [\bar{z}^0 X(\omega, 0) - \bar{z}^0]\,c + \bar{z}^0[X(\omega, 0)\,\tau_{-\omega}g - g]. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\bar{z}^0[X(\omega, 0)\,\tau_{-\omega}g - g] = 0,$$

pour toute solution $\bar{z}^0$ de (13). Il s'en suit que le système d'équations linéaires

$$\bar{z}^0[I - X(\omega, 0)] = 0, \qquad \bar{z}^0[X(\omega, 0)\,\tau_{-\omega}g - g] = 0$$

a les mêmes solutions que le système

$$\bar{z}^0[\Gamma - X(\omega, 0)] = 0,$$

donc le système (11) est compatible et le théorème résulte de la Proposition 10.

THÉORÈME 3. *Si le système (1) n'admet pas de solutions périodiques de période ω, alors il n'admet pas de solutions bornées.*

Démonstrations. Rappelons que d'après [*6*] une distribution f est bornée si et seulement si l'ensemble des translatées $\{\tau_h f\}_{h \in R^1}$ est un ensemble borné dans $\mathscr{D}'$.

D'après le théorème précédent, il existe une solution $\bar{z}$ de période ω du système (12), telle que

$$\int_0^\omega \bar{z} f dt \neq 0.$$

Observons maintenant que si x est une solution quelconque de (1), alors $\tau_{-n\omega}x$, n entier, en est une autre, donc, en appliquant le lemme à la solution $\tau_{-(n-1)\omega}x$, on déduit

$$\bar{z}(\tau_{-n\omega}x - \tau_{-(n-1)\omega}x) = \int_0^\omega \bar{z}f dt, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

La somme des n premières égalités donne

$$\bar{z}(\tau_{-n\omega}x - x) = n \int_0^\omega \bar{z}f dt,$$

donc la distribution x n'est pas bornée.

Solutions Bornées et Solutions presque-Périodiques

Nous allons supposer maintenant que la solution nulle du système homogène (7) est uniformément asymptotiquement stable. On sait qu'alors il existe $\chi \geqslant 1$ et $\mu > 0$, telles que

$$| X(t, s) | \leqslant \chi e^{-\mu(t-s)}, \qquad \text{pour} \qquad t \geqslant s. \tag{14}$$

THÉORÈME 4. *Supposons que la solution nulle de (7) est uniformément asymptotiquement stable, la matrice $A(t)$ a m dérivées continues et bornées sur R^1 et la distribution f est de rang r, $r \leqslant m + 1$. Alors le système (1) admet une solution bornée $w \circ f$ où*

$$w = \{W_s(t)\}_{s \in R^1}, \qquad W_s(t) = H(t - s)\, X(t, s).$$

Cette solution est de rang $r - 1$ ou 0, suivant que $r \geqslant 1$, ou $r = 0$.

Démonstration. Évidemment $W_s(t)$ est une famille de solutions élémentaires de (1),

$$\frac{dW_s(t)}{dt} = A(t)\, W_s(t) + I\delta_s, \qquad \text{pour} \qquad s \in R^1.$$

Désignons par p le nombre $r - 1$, ou 0, suivant que $r \geqslant 1$, ou $r = 0$. Pour $\varphi \in \mathscr{D}_{L^1}^p$ on a $W_s(t)\, \varphi(t) \in L^1$. Posons

$$\eta(s) = \langle W_s(t), \varphi(t) \rangle = \int_s^{+\infty} X(t, s)\, \varphi(t)\, dt.$$

Donc la matrice $\eta(s)$ est dérivable et

$$\frac{d\eta}{ds} = -\eta(s)\, A(s) - I\varphi(s). \tag{15}$$

Il s'en suit que la matrice $\eta(s)$ admet $p+1$ dérivées continues. De (14) on déduit

$$|\eta(s)| \leqslant \kappa \int_s^{+\infty} e^{-\mu(t-s)} |\varphi(t)| \, dt.$$

De l'existence de l'intégrale itérée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{t} e^{-\mu(t-s)} |\varphi(t)| \, ds$$

on déduit l'existence de l'autre intégrale itérée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_{s}^{+\infty} e^{-\mu(t-s)} |\varphi(t)| \, dt,$$

donc $\eta(s)$ est sommable. De (15) et des propriétés de la matrice $A(t)$ on déduit que $\eta \in \mathscr{D}_{L^1}^{p+1}$. Donc la famille w est $(\mathscr{D}_{L^1}^{p}, \mathscr{D}_{L^1}^{p+1})$-composable. Alors

$$\begin{aligned} D(w \circ f) &= (Dw) \circ f = \{A(t)\, W_s(t) + I\delta_s\}_{s \in R^1} \circ f \\ &= \{A(t)\, W_s(t)\}_{s \in R^1} \circ f + (I\delta) * f = A(t)\,(w \circ f) + f, \end{aligned}$$

donc $w \circ f$ est une solution du système (1). Évidemment $w \circ f$ est de rang $\leqslant p$. Si $r = 0$, alors $w \circ f$ est de rang 0 puisque $p = 0$. Si $r \geqslant 1$, $w \circ f$ est de rang $r - 1$, parcequ'alors $p = r - 1$ et

$$\frac{d(w \circ f)}{dt} - A(t)\,(w \circ f) = f.$$

Remarquons que si f est une fonction non-bornée au sens usuel, le Théorème 4 garantit l'existence d'une solution bornée au sens usuel, à condition que f soit de rang 1.

Observation 6. *Il existe des fonctions indéfiniment dérivables de n'importe quel rang.* En effet soit $f(t) = \sin e^t$ et posons $D^n f = f^{(n)}$. Considérons l'équation scalaire

$$\frac{dx}{dt} = -x + f^{(n)}. \tag{16}$$

Puisque f est de rang 0, $f^{(n)}$ est de rang $\leqslant n$. D'après le Théorème 4, $z_n = w \circ f^{(n)}$ est une solution bornée (au sens des distributions) de (16). La solution générale de (16) étant

$$e^{-t}c + z_n$$

on déduit que z_n est la seule solution bornée de (16). Nous allons montrer par induction que pour $n \geqslant 1$

$$z_n = f^{(n-1)} - z_{n-1} \tag{17}$$

z_n est de rang $n - 1$ et $f^{(n)}$ est de rang n. En effet, pour $n = 1$ la fonction $f - z_0$ vérifie (16) (avec $n = 1$); étant bornée, on déduit (17) pour $n = 1$. Alors z_1 est de rang 0. f' est de rang 1 d'après l'exemple *3*, Section 1. Supposons maintenant que les assertions sont vraies pour $n - 1$ ($n \geqslant 2$). On déduit immédiatement (17), donc z_n est de rang $n - 1$. Alors $f^{(n)}$ est de rang n; sans quoi on déduirait du Théorème 4 que z_n est de rang $\leqslant n - 2$.

Nous passons maintenant aux solutions presque-périodiques. Le lemme suivant représente un résultat établi dans [7], l'évaluation améliorée de la note présente, étant sugérée par A. Halanay.

LEMME 2. *Supposons $A(t)$ presque-périodique aux sens de Bohr et la solution nulle de (7) uniformément asymptotiquement stable. Alors il existe $\alpha > 0$, tel qu'à tout $\eta > 0$ correspond $l = l(\eta) > 0$, avec la propriété que dans chaque intervalle de longueur l on peut trouver un nombre ω qui vérifie*

$$| X(t + \omega, s + \omega) - X(t, s) | \leqslant \eta e^{-\alpha(t-s)}, \qquad \text{si} \qquad t \geqslant s.$$

Démonstration. Soient

$$\alpha = \frac{\mu^2 e}{1 + \mu e}, \qquad \gamma = \frac{\chi^2(1 + \mu e)}{\mu e},$$

donc

$$e^{-\mu\sigma}\sigma \leqslant \frac{\gamma}{\chi^2} e^{-\alpha\sigma}, \qquad \text{pour} \qquad \sigma \geqslant 0. \tag{18}$$

Soit ω une η/γ-presque-période de $A(t)$. La fonction

$$Y(t) = X(t + \omega, s + \omega) - X(t, s)$$

vérifie l'équation matricielle

$$\frac{dY}{dt} = A(t)\, Y + [A(t + \omega) - A(t)]\, X(t + \omega, s + \omega), \qquad Y(s) = 0.$$

La formule de variation des constantes donne

$$Y(t) = \int_s^t X(t, h)\, [A(h + \omega) - A(h)]\, X(h + \omega, s + \omega)\, dh.$$

Alors, pour $t \geqslant s$ on a d'après (14)

$$| X(t + \omega, s + \omega) - X(t, s) | \leqslant \chi^2 \int_s^t | A(h + \omega) - A(h) |\, e^{-\mu(t-s)}\, dh,$$

donc

$$| X(t + \omega, s + \omega) - X(t, s) | \leqslant \frac{\eta}{\gamma} \chi^2 e^{-\mu(t-s)}(t - s)$$

et le lemme résulte de (18).

OBSERVATION 7. La fonction $X(t, s)$ vérifie certaines propriétés usuelles dans la théorie des fonctions presque-périodiques. Mentionnons qu'avec les méthodes usuelles de cette théorie on peut établir que $X(t, s)$ est uniformément continue dans le sémiplan $t \geqslant s$, ainsi que le théorème des presque-périodes communes à $X(t, s)$ et à une fonction presque-périodique usuelle $f(t)$. C'est pourquoi nous dirons que $X(t, s)$ *est presque-périodique en diagonale.*

THÉORÈME 5. *Supposons que la solution nulle de (7) est uniformément asymptotiquement stable, $A(t) \in \mathscr{B}$ et $A(t)$ et f sont presque-périodiques.*[1] *Alors le système (1) admet une solution presque-périodique unique $w \circ f$.*

Démonstration. Nous montrons d'abord que si f est une distribution-fonction presque-périodique au sens de Bohr, alors $z(t) = w \circ f$ est presque-périodique au même sens. Remarquons encore que dans ces conditions, l'existence de la solution presque-périodique résulte d'un théorème de A. Halanay [*4*].

Il est facile à voir que dans ces conditions

$$w \circ f = \int_{-\infty}^{t} X(t, s) f(s)\, ds.$$

Soit

$$M = \sup_{t \in R^1} | f(t) |.$$

Soit $\epsilon > 0$ arbitraire,

$$\eta = \frac{\epsilon \mu \alpha}{\alpha \chi + \mu M}$$

et ω une η-presque-période commune de $X(t, s)$ et $f(t)$. Alors

$$| z(t+\omega) - z(t) | = \left| \int_{-\infty}^{t+\omega} X(t+\omega, s) f(s)\, ds - \int_{-\infty}^{t} X(t, s) f(s)\, ds \right|$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{t} [X(t+\omega, s+\omega) f(s) - X(t, s) f(s)]\, ds \right|,$$

donc, d'après le lemme

$$| z(t+\omega) - z(t) | \leqslant \int_{-\infty}^{t} | X(t+\omega, s+\omega) | \, | f(s+\omega) - f(s) | \, ds$$

$$+ \int_{-\infty}^{t} | X(t+\omega, s+\omega) - X(t, s) | \, | f(s) | \, ds \leqslant \eta \frac{\chi}{\mu} + \eta \frac{M}{\alpha} \leqslant \epsilon,$$

ce qui montre que ω est une ϵ-presque-période de $z(t)$.

[1] On désigne par $\mathscr{B}$ l'espace des fonctions dont toutes les dérivées sont bornées sur R^1.

Supposons maintenant que f est une distribution presque-périodique [6]. L'espace des fonctions presque-périodiques au sens de Bohr étant dense dans l'espace des distributions presque-périodiques, il s'en suit que $w \circ f$ est aussi presque-périodique.[2]

Références

1. Bourbaki, N., "Espaces Vectoriels Topologiques." Hermann, Paris, 1955.
2. Cristescu, R., Familles composables de distributions et systèmes physiques linéaires. *Rev. Roumaine Math. pur. appl.* **9** (1964), 8.
3. Ghelfand, I. M., and Silov, G. E., "Espaces de Fonctions Fondamentales et Généralisées" (russe). Moscou, 1958.
4. Halanay, A., "Differential Equations: Stability, Oscillations, and Time Lags." Academic Press, New York, Traduit du roumain Teoria calitativà a ecuatiilor diferentiale Ed. Academiei R.P.R. (1963).
5. Mikusinski, I., and Sikorski, R., "The Elementary Theory of Distributions." Warszaw, 1957, Panstwowe Wydawnicstwo naukowe.
6. Schwartz, L., "Théorie des Distributions," Vols. 1, 2. Hermann, Paris, 1957.
7. Wexler, D., Solutions périodiques et presque-périodiques des systèmes d'équations différentielles aux impulsions. *C.R. Acad. Sci. Paris* **259** (1964).

[2] Ajouté à l'épreuve. L'auteur tient à signaler le livre de V. Dolezal: "Dynamics of Linear Systems," Praha, 1964, dont il n'avait pas connaissance au moment de la rédaction de cette note. Dans ce livre l'on trouve certains questions concernant l'existence des solutions périodiques des systèmes de second ordre à coefficients constants en distributions.